MINIMÁLIS KERÜLETŰ HÁROMSZÖGMETSZETEK SZÁMA SPECIÁLIS RÁCSTÉGLÁKBAN

Írta: MISKOLCZI JÓZSEF

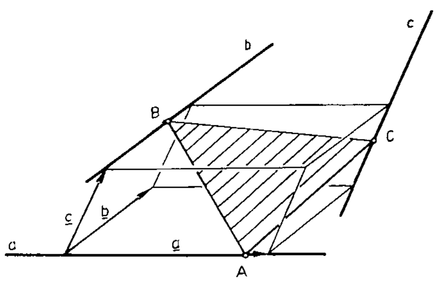
VARECZA L. és VARECZA Á. [1]-ben megadta az R^{ab} négyzetrácsnak egy $R^{\overline{ab}}$ rácstéglalapon belüli olyan rácsnégyzetek számát, amelyeknek csúcsai rácspontok, oldalai pedig rácsszakaszok.

A következőkben egy R^{abc} kockarács páronként kitérő rács-egyeneshármasaihoz tartozó minimális kerületű háromszögmetszeteinek a számát adjuk meg egy $R^{\overline{abc}}$ rácstéglán** belül.*

A. Előbb bebizonyítjuk a következő állítást:

1. *Az a, b, c egy és ugyanazon síkkal nem párhuzamos három páronként kitérő egyenesnek létezik minimális kerületű háromszögmetszete.*

Bizonyítás. Tekintsük azt a paralelepipedont, amelyet az a, b, c egyenesek generálnak (1. ábra).



1. ábra

Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy

$$a(a_1, 0, 0)$$

$$b(b_1, b_2, 0)$$

$$c(c_1, c_2, c_3); \qquad (a_1, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3 > 0) \quad \text{legyen.}$$

* A háromszögmetszet úgy értendő, mint [2]-ben

** Az $R^{\overline{abc}}$ rácstégla csúcsai rácspontok, élei rácsszakaszok

Jelölje az A, B, C pontok helyvektorát a_0, b_0, c_0. Ekkor

$$a_0 = \alpha a$$

$$b_0 = c + \beta b$$

$$c_0 = a + b + \gamma c$$

$$|a_0 - b_0|^2 = \sum_{i=1}^{3} [\alpha a_i - (c_i + \beta b_i)]^2$$

$$|c_0 - a_0|^2 = \sum_{i=1}^{3} [(a_i + b_i + \gamma c_i) - \alpha a_i]^2$$

$$|b_0 - c_0|^2 = \sum_{i=1}^{3} [(c_i + \beta b_i) - (a_i + b_i + \gamma c_i)]^2$$

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i=1}^{3} \{[\alpha a_i - (c_i + \beta b_i)]^2 + [(a_i + b_i + \gamma c_i) - \alpha a_i]^2 + [(c_i + \beta b_i) - (a_i + b_i + \gamma c_i)]^2\}.$$

A következőkben megmutatjuk, hogy az f függvénynek létezik a minimuma. Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f'_\alpha(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i=1}^{3} [4a_i^2 \alpha - 2a_i b_i \beta - 2a_i c_i \gamma - 2a_i(a_i + b_i + c_i)]$$

$$f'_\beta(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i=1}^{3} [4b_i^2 \beta - 2a_i b_i \alpha - 2b_i c_i \gamma + 2b_i(c_i - a_i - b_i)]$$

$$f'_\gamma(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i=1}^{3} [4c_i^2 \gamma - 2b_i c_i \beta - 2a_i c_i \alpha + 2c_i(2a_i + 2b_i - c_i)]$$

Ha az f függvénynek van minimuma, akkor ez a minimumhely az alábbi lineáris egyenletrendszerből adódik:

$$4a_1^2 \alpha - 2a_1 b_1 \beta - 2a_1 c_1 \gamma - 2a_1(a_1 + b_1 + c_1) = 0$$

$$(1) \qquad -2a_1 b_1 \alpha + 4(b_1^2 + b_2^2)\beta - 2(b_1 c_1 + b_2 c_2)\gamma + \sum_{i=1}^{3} 2b_i(c_i - a_i - b_i) = 0$$

$$-2a_1 c_1 \alpha - 2(b_1 c_1 + b_2 c_2)\beta + 4(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)\gamma + \sum_{i=1}^{3} 2c_i(2a_i + 2b_i - c_i) = 0$$

Könnyen belátható, hogy az (1) egyenletrendszer determinánsára

$$\begin{vmatrix} 4a_1^2 & -2a_1 b_1 & -2a_1 c_1 \\ -2a_1 b_1 & 4(b_1^2 + b_2^2) & -2(b_1 c_1 + b_2 c_2) \\ -2a_1 c_1 & -2(b_1 c_1 + b_2 c_2) & 4(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) \end{vmatrix} =$$

$$= 8a_1^2 \begin{vmatrix} 2 & -b_1 & -c_1 \\ -b_1 & 2(b_1^2 + b_2^2) & -(b_1 c_1 - b_2 c_2) \\ -c_1 & -(b_1 c_1 + b_2 c_2) & 2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) \end{vmatrix} > 0$$

teljesül. Ezért az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. Képezzük előbb f-nek a másodrendű parciális differenciálhányadosait, majd alkossuk meg a *Hesse*-féle determinánst. Látható, hogy ebben az esetben az egyenletrendszer determinánsát nyerjük. E determináns sarokdeterminánsainak sorozata:

$$4a_1^2; \quad \begin{vmatrix} 4a_1^2 & -2a_1b_1 \\ -2a_1b_1 & 4(b_1^2+b_2^2) \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 4a_1^2 & -2a_1b_1 & -2a_1c_1 \\ -2a_1b_1 & 4(b_1^2+b_2^2) & -2(b_1c_1+b_2c_2) \\ -2a_1c_1 & -2(b_1c_1+b_2c_2) & 4(c_1^2+c_2^2+c_3^2) \end{vmatrix}$$

Ezek mind pozitívok, tehát az f függvénynek az (α, β, γ) helyen valóban minimuma van.

Következményként adódik az alábbi állítás:

2. *Ha a, b, c három páronként kitérő és páronként merőleges egyenesek, akkor az f függvénynek az* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *helyen minimuma van.*

B. Jelölje R^{abc} az a, b, c egyenesekkel generált kockarácsot.

Tétel. *Az R^{abc} kockarács páronként kitérő egyeneshármasaihoz tartozó minimális kerületű háromszögmetszeteinek a száma egy $\overline{R^{abc}}$ rácstéglán belül:*

$$N^{\overline{abc}} = (\bar{a}^2+\bar{a})(\bar{b}^2+\bar{b})(\bar{c}^2+\bar{c}),$$

ahol $\bar{a}$ az a egyenessel, $\bar{b}$ a b-vel, $\bar{c}$ a c-vel egyező állású téglaél (illetve annak hossza rácsegységben).

Bizonyítás. Jelölje X az a egyenessel, Y a b-vel, Z a c-vel egyező állású rácsszakaszokat (illetve ezek hosszát). Könnyen belátható, hogy az $\overline{R^{abc}}$ rácstéglán belül azon rácstéglák száma, melyek élei rácsegyenesekre illeszkednek

$$(2) \quad \sum_{X=1}^{\bar{a}} \sum_{Y=1}^{\bar{b}} \sum_{Z=1}^{\bar{c}} [(\bar{a}-X+1)(\bar{b}-Y+1)(\bar{c}-Z+1)] = \frac{1}{8}(\bar{a}^2+\bar{a})(\bar{b}^2+\bar{b})(\bar{c}^2+\bar{c}).$$

A 2. állításból következik, hogy egy páronként merőleges és kitérő egyeneshármas által generált téglához 8 minimális kerületű háromszögmetszet tartozik. Így (2)-t figyelembe véve állításunk igaz.

IRODALOM

[1] VARECZA Á., VARECZA L.: Négyzetrács rácspontjai által meghatározott téglalapok és négyzetek számáról, Acta Academiae Pedagogicae Nyíregyháziensis, 5, 1973.

[2] MISKOLCZI J.: Páronként kitérő három egyenes háromszögmetszete, Szegedi Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei, 1973.

DIE ANZAHL DER DREIECKSCHNITTE MIT MINIMALEN UMFANGE IN SPEZIELLEN GITTERQUADERN

J. Miskolczi

Verfasser gibt die Anzahl der Dreieckschnitte mit minimalen Umfange an, wenn die Eckpunkte der Dreiecke an drei paarweisen windschiefen Gitterlinien sind und alle Dreieckschnitte in einem solchen Quader liegen, wessen Kanten zu den Koordinatenachsen parallel sind.

ЧИСЛО ТРЕУГОЛЬНИКОВ С МИНИМАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В СПЕЦИАЛЬНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ РЕШЁТКАХ

Й. Мишкольци

Рассматриваются специальные прямоугольные решетки в трехмерном пространстве и вычисляется число треугольников с минимальным периметром, углы которых расположены соотв. На трех взаимно скрещивающихся ребрах.